Երեւանի պետական համալսարան

Ինֆորմատիկայի եւ կիրառական մաթեմատիկայի ֆակուլտետ

Մագիստրոսական թեզ

Գրաֆների ներկման մի ընդհանրացում

Հեղինակ՝ Վահե Սարգսյան

Գիտական ղեկավար՝ պրոֆեսոր Ռաֆիկ Նշանի Տոնոյան

Երեւան,

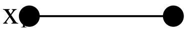
2005

Դիցուք ունենք $G=(V, X)$ գրաֆը:

Սահմանում: G գրաֆի սովորական ներկում h գույնով կանվանենք $\varphi:V\to\{1,2,...,h\}$ արտապատկերումը, այնպիսի, որ եթե $(u,v)\in X$, ապա $\varphi(u)^{1}\varphi(v)$:

$\chi_2(G)$-ով նշանակենք գույների մինիմալ թիվը, որոնցով G գրաֆը կարելի է սովորական ներկել և այն կանվանենք գրաֆի ներկման թիվ:

Պարզ է, որ $\chi_2(G)\geq k(G)$, որտեղ $k(G)$–ն գրաֆի խտությունն է ,այսինքն G գրաֆի մաքսիմալ լրիվ ենթագրաֆի գագաթների քանակը: Սակայն կարող ենք ցույց տալ, որ $\chi_2(G)$–ն ինչքան ասես կարող է մեծ լինել $k(G)$–ից:

Դիտարկենք G_1 գրաֆը՝ x_1  x_2 , որի համար $\chi_2(G_1)=2$ և $k(G_1)=2$:

Ունենալով $G_k=(V_k,X_k)$ գրաֆը, կառուցենք $G_{k+1}=(V_{k+1},X_{k+1})$ գրաֆը, որտեղ $\chi_2(G_k)=k+1, k(G_k)=2$ և $V_k=\{v_1,...,v_n\}$:

$G_{k+1}=(V_{k+1},X_{k+1})$ գրաֆը կառուցենք հետևյալ ձևով՝

$$V_{k+1}=V_k\cup\{x'_1,x'_2,....,x'_n,y\}$$
$$X_{k+1}=X_k\cup\{(y,x'_i)/i=1,2,...,n\}\cup\{(x'_i,x_j)/(x_i,x_j)\in X_k,i,j=1,2,...,n\}$$

Պարզ է, որ $G_{k+1}=(V_{k+1},X_{k+1})$ գրաֆը եռանկյուն չի պարունակում, այսինքն $k(G_{k+1})=2$: Ցույց տանք որ $\chi_2(G_{k+1})=k+2$:

Նախ ցույց տանք, որ $G_{k+1}=(V_{k+1},X_{k+1})$ գրաֆը $k+2$ գույնով կարելի է սովորական ներկել:

G_k գրաֆը ներկենք $k+1$ գույնով և x'_i-ին տանք x_i–ի ստացած գույնը, և y-ը ներկենք $(k+2)$–րդ գույնով, հետևաբար ըստ G_{k+1} գրաֆի կառուցման, տվյալ ներկմամբ այն կլինի $k+2$ գույնով սովորական ներկելի: Այսինքն ստացանք, որ $\chi_2(G_{k+1})\leq k+2$:

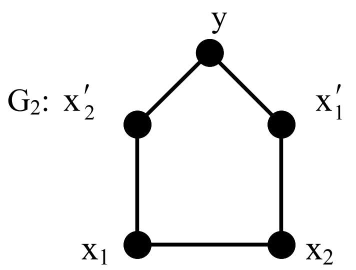
Այժմ ցույց տանք, որ G_{k+1} գրաֆը $k+1$ գույնով սովորական ներկել հնարավոր չի:

Իսկապես, եթե y-ին տանք որևէ գույն, ապա x'_i-ները կարող են ստանալ ամենաշատը k գույն, և եթե x_i-ին տանք x'_i–ի ստացած գույնը , ապա սովորական ներկելիության պայմանը չպետք է խախտվի, այսինքն G_k գրաֆը կարելի է ներկել k գույնով, եկանք հակասության:

Ստացանք, որ

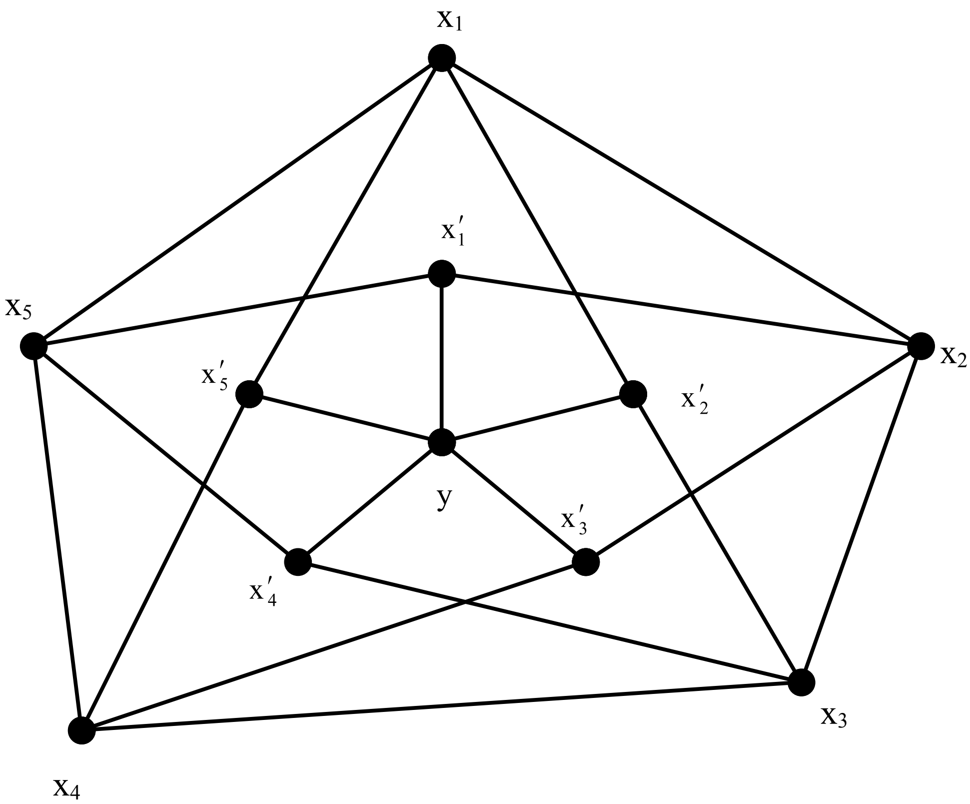
$\chi_2(G_{k+1})=k+2$ և $k(G_{k+1})=2$:

Կոնստրուկտիվ կառուցումից ստանում ենք, որ $|V_k|=3*2^{k-1}-1$:



$\chi_2(G_2) = 3$
$k(G_2) = 2$

G_3:



$\chi_2(G_3) = 4$
$k(G_3) = 2$

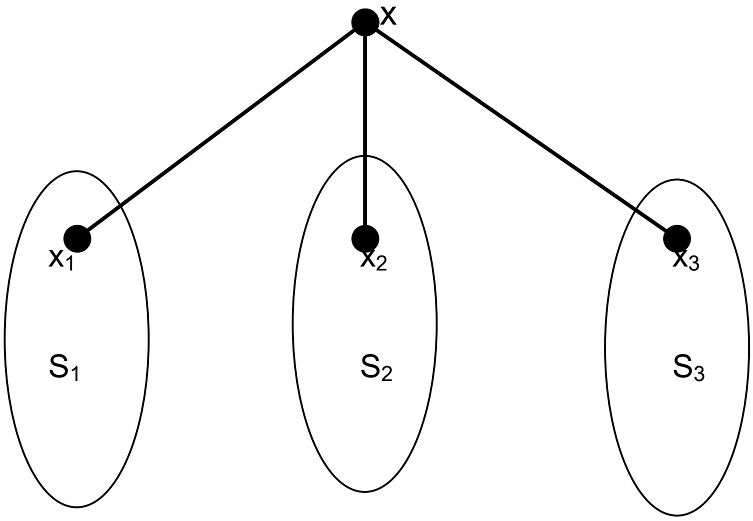
Դիցուք ունենք $G= (V, X)$ գրաֆը և $k(G)\leq 3$:

Թեորեմ: Եթե G գրաֆի բոլոր կենտ երկարություն ունեցող պարզ ցիկլերի երկարությունը հավասար է երեքի, ապա G գրաֆը երեք գույնով կարելի է սովորական ներկել:

Ապացույց: Տանք սովորական ներկման հետևյալ ալգորիթմը և ցույց տանք, որ այդ ալգորիթմով գրաֆը կներկվի երեք գույնով:

Ալգորիթմ: Վերցնում ենք S_1 ,S_2 և S_3 դատարկ բազմությունները և G գրաֆի գագաթները ինչ-որ հերթականությամբ դիտարկում: Դիտարկվող գագաթը գցում ենք

այն բազմության մեջ, որի մեջ զցելուց բազմության անկախ լինելու հատկությունը չի կորչում:
Բազմությունները դիտարկվում են հերթով. սկզբում S_1 , հետո S_2 , հետո S_3: Ցույց տանք, որ այս ալգորիթմով գրաֆը կարելի է սովորական ներկել երեք գույնով:
Ենթադրենք հակառակը, k-րդ քայլում դիտարկվող x գագաթը ոչ մի բազմության մեջ զցել չենք կարող.



Պարզ է, որ x գագաթին կից գագաթների մեջ եռանկյուն չկա, այսինքն x_1 , x_2 և x_3 գագաթների մեջ ∃ 2 գագաթ, որոնք կից չեն: Առանց ընդհանրությունը խախտելու կարող ենք ենթադրել, որ x_1 և x_2 գագաթները կից չեն: Եվ քանի որ (S_1Ç S_2) գագաթներով ծնված ենթագրաֆը երկկողմանի է և $x_1 \in S_1$, $x_2 \in S_2$, ապա ∃ x_1-ից x_2 կենտ երկարություն ունեցող պարզ ճանապարհ, այսինքն գրաֆում ∃ կենտ երկարություն ունեցող պարզ ցիկլ, որի երկարությունը մեծ է 3-ից, եկանք հակասության:

Դիցուք ունենք G= (V, X) գրաֆը: Ենթադրենք $a \in C_{2k+1}$, որտեղ C_{2k+1}-ը որևէ կենտ երկարություն ունեցող պարզ ցիկլ է և $a_i \in C_{2k+1}, i = 1,...,2k, (a, a_1) \in X, (a, a_2) \in X$:

<u>*Սահմանում1*</u>: b գագաթը կանվանենք a գագաթի «նման փոխարինող» գագաթ C_{2k+1} պարզ ցիկլի համար, եթե $(b, a_1) \in X, (b, a_2) \in X$:

<u>*Սահմանում2*</u>: c գագաթը կանվանենք a գագաթի «տրիվիալ փոխարինող» գագաթ C_{2k+1} պարզ ցիկլի համար, եթե ∃$c_1, c_2 \in V$ այնպիսին, որ $(c,c_1) \in X$, $(c,c_2) \in X$,և c_1-ը կամ a_1-ն է,կամ a_1-ի «նման փոխարինող» գագաթը C_{2k+1} պարզ ցիկլի համար կամ a_1–ի «ճիշտ փոխարինող» գագաթն է և c_2-ը կամ a_2–ն է, կամ a_2–ի «նման

փոխարինող» գագաթը C_{2k+1} պարզ ցիկլի համար ,կամ a_2–ի «ճիշտ փոխարինող» գագաթն է:

Սահմանում3: d գագաթը կանվանենք a գագաթի «փոխարինող» գագաթը C_{2k+1} պարզ ցիկլի համար, եթե $\exists$ $a_i^1, a_i^2, ..., a_i^{n_i}$ գագաթներ պատկանող V–ին, i = 1,2, այնպիսին, որ $(b, a_i^{n_i}) \in X, i = 1,2$ և $a_i^{n_i} = a_i$, և a_i^{j+1}-ը հանդիսանում է a_i^j-ի «տրիվիալ փոխարինող» գագաթ C_{2k+1} պարզ ցիկլի համար, կամ a_i^j–ի «ճիշտ փոխարինող» գագաթ, $i = 1,2$, $j = 1,2,..., \max_i n_i$:

Սահմանում4: b_1 գագաթը կանվանենք a գագաթի «ճիշտ նման» գագաթ, եթե $(b_1,a_i) \in X$ $i = 1,2,...,2k$, $(b_1,a) \notin X$:

Սահմանում5: b_2 գագաթը կանվանենք a գագաթի «ճիշտ տրիվիալ» գագաթ, եթե $\exists d_j \in V$ գագաթները այնպիսին, որ $(b_2, d_j) \in X$, j = 1,2,...,2k և d_j-ն կամ a_j–ն է, կամ a_j–ի «փոխարինող» գագաթը C_{2k+1} պարզ ցիկլի համար կամ a_j–ի «ճիշտ նման» գագաթն է:

Սահմանում6: b_3 գագաթը կանվանենք a գագաթի «ճիշտ փոխարինող» գագաթ, եթե $\exists e_i^1, e_i^2, ..., e_i^{n_i}$ գագաթներ պատկանող V–ին(i = 1,2,...,2k) այնպիսին, որ $(b_3, e_i^{n_i}) \in X, i = 1,2,...,2k$ և $e_i^1 = a_i$ և e_i^{j+1}-ը հանդիսանում է e_i^j-ի «փոխարինող» գագաթը C_{2k+1} տվյալ ցիկլի համար, կամ e_i^j–ի «տրիվիալ ճիշտ» գագաթը, $j = 1,2,..., \max_i n_i$:

Թեորեմ: Որպեսզի գրաֆը լինի 3 գույնով սովորական ներկելի, անհրաժեշտ է, որ գոյություն չունի e գագաթ այնպիսին, որ կից լինի որևէ կենտ երկարություն ունեցող պարզ ցիկլի բոլոր «գագաթներին», որտեղ«գագաթը» տվյալ ցիկլին պատկանող գագաթն է, կամ այդ գագաթի «փոխարինող» գագաթը տվյալ ցիկլի համար, կամ այդ գագաթի «ճիշտ փոխարինող» գագաթն է:

Ապացույց: Ենթադրենք հակառակը, գրաֆը 3 գույնով սովորական ներկելի է և $\exists$ e այդպիսի գագաթ: Եթե e-ին տանք որևէ գույն, ապա նրա կից գագաթները կարող են ստանալ ամենաշատը 2 գույն, և եթե e-ին կից գագաթների մեջ կա «ճիշտ փոխարինող» կամ «փոխարինող» գագաթներ, ապա այդ գագաթների ստացած գույնով եթե ներկենք իրենց համապատասխան գագաթները, որոնք պատկանում են տվյալ կենտ երակորրություն ւոնեցող պարզ ցիկլին, ապա գրաֆի ներկելիությունը կպահպանվի և կենտ երկարություն ունեցող պարզ ցիկլը կներկվի 2 գույնով,որը հնարավոր չէ: Եկանք հակասության:

Թեորեմից պարզ է դառնում, որ եթե b-ն a–ի «ճիշտ փոխարինող» գագաթն է,ապա գրաֆի կամայական 3 գույնով սովորական ներկման ժամանակ a և b գագաթները պետք է ներկվեն նույն գույնով:
Նկատենք, որ եթե c-ն b–ի «ճիշտ փոխարինող» գագաթն է, b-ն a–ի «ճիշտ փոխարինող»-ը, ապա c-ն կլինի a–ի «ճիշտ փոխարինող» գագաթը:

<u>*Սահմանում:*</u> Գրաֆի գաագքների ներկումը կանվանենք 3-թույլատրելի, եթե գաագքները կարելի է ներկել այնպես, որ այն չպարունակի 3 գագաթ պարունականող լրիվ ենթագրաֆ, որի բոլոր գագաթները ներկված լինեն նույն գույնով:
$\chi_3(G)$-ով նշանակենք գույների մինիմալ թիվը, որոնցով գրաֆը կարելի է ներկել այնպես, որ այն լինի 3-թույլատրելի և այն կանվանենք 3- թույլատրելի ներկման թիվ:

Դիցուք ունենք G= (V, X) գրաֆը:

<u>Պնդում</u>: $\chi_3(G) \le \left]\frac{\chi_2(G)}{2}\right[$:

<u>Ապացույց</u>: Եթե G գրաֆի սովորական ներկման թիվը հավասար է $\chi_2(G)$-ի,ապա G գրաֆի գագաթների V բազմությունը կարելի էտրոհել $\chi_2(G)$–ի հատ անկախ ենթաբազմությունների՝

$$V = V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_{\chi_2(G)},$$

որտեղ V_i –ին անկախ է և $V_i \cap V_j = \varnothing, (i \neq j), i,j=1,2,\ldots, \chi_2(G)$:

Պարզ է , որ ($V_i \cup V_j$) գագաթներով ծնված ենթագրաֆը եռանկյուն չի պարունակում, այսինքն V գագաթների բազմությունը կարող ենք տրոհել $\left]\frac{\chi_2(G)}{2}\right[$ հատ ենթաբազմությունների այնպես, որ յուրաքանչյուր ենթաբազմությունով ծանված ենթագրաֆը եռանկյուն չպարունակի՝

$$V = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_{\left]\frac{\chi_2(G)}{2}\right[}$$

որտեղ S_i–ով ծնված ենթագրաֆը եռանկյուն չի պարունակում և $S_i \cap S_j = \varnothing$, $(i \neq j)$, $i,j=1,2,\ldots, \left]\frac{\chi_2(G)}{2}\right[$:

Սակայն վերևում կոնստրուկտիվ կառուցված գրաֆներից պարզ է դառնում, որ χ_2–ն և χ_3-ը ինչքան ասես կարող են տարբերվել՝ $\chi_2(G_k) = k+1, k \in N, \chi_3(G_k) = 1$:

Դիցուք ունենք G= (V, X) գրաֆը և $\forall u \in V, d(u) \leq 3$:

Ցույց տանք, որ $\chi_3(G) = 2$:

V բազմությունը տրոհենք $V_1 \cup V_2$ այնպես, որ A–ն լինի մաքսիմում, որտեղ $A = \{(u,w) \in X / u \in V_1, w \in V_2\}$:

Պարզ է, որ այդպիսի տրոհում ∃, քանի որ ռրոհիումների քանակը վերջավոր է:

Ցույց տանք, որ այդպիսի տրոհման դեպքում V_1–ով և V_2-ով ծնված ենթագրաֆները եռանկյուն չեն պարունակում: Իսկապես, երբ A-ն մաքսիմում է, ապա $\forall u \in V$ համար գոյություն չունի $u_1, u_2 \in V$ այնպիսին $(u,u_1) \in X$, $(u,u_2) \in X$ որ և $u_1, u_2, u_3 \in V_1$ կամ $u_1, u_2, u_3 \in V_2$: Այսինքն մաքսիմալ տրոհման գագաթին կից միայն մեկ գագաթ կարող է գտնվել նույն բազմության մեջ, այսինքն V_1–ով և V_2-ով ծնված ենթագրաֆները եռանկյուն չեն պարունակում՝ $\chi_3(G) = 2$:

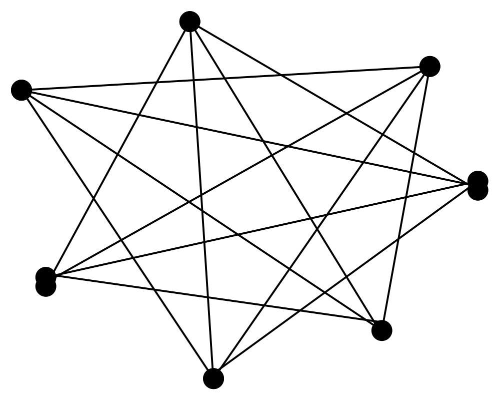
<u>Պնդում</u>: Դիցուք ունենք G= (V, X) գրաֆը և $\forall u \in V, d(u) \leq 4$: Որպեսզի $\chi_3(G) = 2$ անհրաժեշտ է, որ G գրաֆը չպարունակի 5 գագաթ պարունակող լրիվ ենթագրաֆ: Իսկապես, $\chi_3(K_5) = 3$:

Պարզ է , որ կամայական G գրաֆի համար $\chi_3(G) \geq \left]\frac{k(G)}{2}\right[$:

Այժմ կառուցենք մի այնպիսի H գրաֆ, որ $k(H) = 3, \chi_3(H) = 3$:

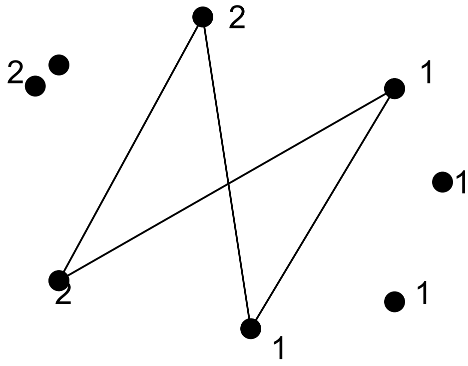
Դիտարկենք հետևյալ H' գրաֆը՝

H':

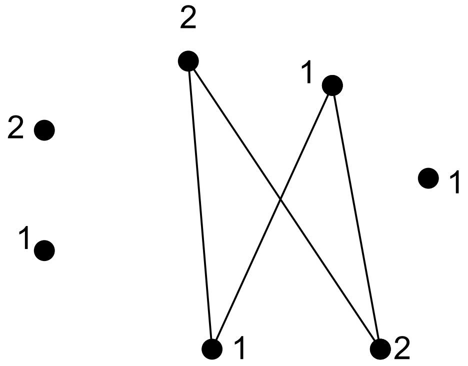


H' գրաֆը կարելի է ներկել երկու եղանակով, որ $\chi_3(H')=2$, և յուրաքանչյուր եղանակում կա 7 հնարավորություն:

1.եղանակ



2.եղանակ



Պարզ է, որ յուրաքանչյուր հնարավոր ներկման ժամանակ ($\chi_3(H')=2$) ∃ ենթագրաֆ, որը եռանկյուն չի պարունակում, և պարունակում է 2 այնպիսի կողեր, որոնց կից գագաթները ներկված են նույն գույնով և տարբեր կողերի գագաթները տարբեր գույներով: Եվ եթե յուրաքանչյուր ներկման համար ավելացնենքմի գագաթ, որը կից լինի նշված ենթագրաֆի բոլոր գագաթներին, ապա կառուցված H գրաֆի համար` $k(H)=3, \chi_3(H)=3$

__Սահմանում__: Գրաֆը կանվանենք (h,s)-ներկելի, եթե գրաֆի գագաթները h գույների միջոցով կարելի է ներկել այնպես, որ այն չպարունակի s գագաթ պարունակող լրիվ ենթագրաֆ, որի բոլոր գագաթները ներկված լինեն նույն գույնով:

Դիցուք ունենք $\{0,1\}$-երից $m\times n$ չափի աղյուսակ, որի յուրաքանչյուր տողում կա ճիշտ s հատ 1:

__Խնդիր__: Աղյուսակի սյուների բազմությունը տրոհել h հատ ենթաբազմությունների այնպես, որ գոյություն չունենա տող, որի բոլոր 1-երը գտնվեն նույն ենթաբազմությունում:

Այս խնդիրը NP-դժվար է [2]:Այս խնդիրը հայտնի է հիպերգրաֆի ներկելիույուն անունով:

Ցույց տանք, որ հիպերգրաֆի h ներկելիությունը ավելի բարդ է քան գրաֆի (h,s)-ներկելիությունը:
Դիցուք ունենք G գրաֆը: Դիտարկենք հետևյալ աղյուսակը, որի սյուների քանակը հավասար է գրաֆի գագաթների քանակին և աղյուսակի տողերը գրաֆի բոլոր s գագաթ պարունակող լրիվ ենթագրաֆներն են՝ լրիվ ենթագրաֆի գագաթների համարներով սյուներում գրած 1-եր: Պարզ է, որ G գրաֆը (h,s)-ներկելի է այն և միայն այն դեպքում, եթե նրան համապատասխանող հիպերգրաֆը h ներկելի է:
Դիցուք ունենք $\{0,1\}$-երից $m \times n$ չափի աղյուսակ, որի յուրաքանչյուր տողում կա ճիշտ 3 հատ 1:
Խնդիր: Աղյուսակի սյուների բազմությունը տրոհել 2 ենթաբազմությունների այնպես, որ գոյություն չունենա տող, որի բոլոր 1-երը գտնվեն նույն ենթաբազմությունում:
Այս խնդիրը նույնպես NP-դժվար է [2]:
Ցույց տանք, որ 3-իրագործելիություն խնդիրն ավելի բարդ է քան այս խնդիրը:
Յուրաքան տողի համար կազմենք հետևյալ կոնյուկտիվ ձևը՝

$$F_i = (x_{j_1} \vee x_{j_2} \vee x_{j_3})(\overline{x}_{j_1} \vee \overline{x}_{j_2} \vee \overline{x}_{j_3}),$$

որտեղ j_1, j_2, j_3–ը i-րդ տողում գրված 1-երի սյուների համարներն են:
Աղյուսակի համար կազմենք հետևյալ կոնյուկտիվ նորմալ ձևը՝

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_1 \& F_2 \& \ldots \& F_m$$

Պարզ է, որ աղյուսակի սյուների բազմությունը կարելի է տրոհել երկու ենթաբազմությունների այնպես, որ գոյություն չունենա տող, որի բոլոր 1-երը գտնվեն նույն ենթաբազմությունում,այն և միայն այն դեպքում, եթե $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ֆունկցիան նույնաբար զրո չէ:

Դիցուք ունենք $G=(V,X)$ p գագաթ պարունակող սովորական գրաֆ, և $V=\{1, 2, \ldots ,p\}$: G գրաֆի գագաթների ներկում h գույնով կանավնեքն $\varphi:V\to\{1,2,...,h\}$ արտապատկերումը, և այդ դեպքում կընդունենք, որ i–րդ գաագըը ներկված է $\varphi(i)$ գույնով: Ներկումը կանվանենք s-թույլատրելի, եթե G գրաֆի գագաթների ներկման ժամանակ այն չի պարունակում s գագաթ պարունակող լրիվ ենթագրաֆ, որի բոլոր գագաթները ներկված լինեն նույն գույնով:
Գրաֆը կոչվում է (h,s)-ներկելի, եթե նրա համար կա s-թույլատրելի ներկում $\{1,2,...,h\}$ գույներով:
$G(p,h,s)$-ով նշանակենք բոլոր (h,s)–ներկելի $G=(V,X)$ գրաֆների բազմությունը, որոնց համար $V=\{1, 2, \ldots ,p\}$:

$\mu_n(G)$-ով նշանակենք G գրաֆի n գագաթ պարունակող լրիվ ենթագրաֆների քանակը:

Ենթադրենք, որ

$$f_n(p,h,s) = \max_{G\in G(p,h,s)} \mu_n(G)$$

Պարզ է,որ $f_n(p,h,s)$–ը n գագաթ պարունակող լրիվ ենթագրաֆների առավելագույն քանակն է p գագաթ պարուկող (h,s)–ներկվող գրաֆներում:

Նկատենք, որ 2-թույլատրելի ներկումը հանդիսանում է գրաֆի սովորական ներկում և $f_2(p,h,s)$-ը կողերի առավելագույն քանակն է p գագաթ պարունակող (h,s)–ներկվող գրաֆներում:

Նշանակենք ex(p,H)–ով կողերի առավելագույն քանակը p գագաթ պարունակող գրաֆներից, որը H ենթագրաֆ չի պարունակում:

<u>Թեորեմ</u> (Տուրանի):

$$ex(p,K_n) = m^2\binom{n-1}{2} + m(s-2)r + \binom{r}{2}$$

որտեղ $p = m(s-1) + r$, $0\le r < s-1$:

Դիցուք G =(V,X) գրաֆ է և V={1, 2, … ,p}:

Նշանակենք

$$H_p = \{(y_1, y_2,..., y_p,) / y_1 + y_2 + ... + y_p = 1, y_1 \ge 0, i = 1,2,..., p\}$$

U_n-ը սահմանենք հետևյալ կերպ՝

U_n={$\{i_1,i_2,...,i_n\}$/ որտեղ $\{i_1,i_2,...,i_n\}$–ը G–ի ենթագրաֆ է և նրանցով ծնված ենթագրաֆը լրիվ է}:

Դիտարկենք այս ֆունկցիան՝

$$F_{G,n}(y_1,..., y_p) = \sum_{\{i_1,i_2,...,i_n\}\in U_n} y_{i_1} y_{i_2} ... y_{i_n}$$

որտեղ $2 \le n \le k(G)$:

Ենթադրենք, որ

$$\Phi_n(G) = \max_{(y_1,...,y_p)\in H_p} F_{G,n}(y_1,..., y_p):$$

<u>Թեորեմ1:</u>

$$\Phi_n(G) = \binom{k(G)}{n}\frac{1}{k(G)^n}$$

Ապացույց: Առանց ընդհանրությունը խախատելու կարելի է ընդունել, որ $\{1,2,\ldots,k(G)\}$ գագաթներով ծնված ենթագրաֆը լրիվ է:

Որոշենք $y_1,y_2,\ldots,y_p$ փոփոխականների արժեքները հետևյալ կերպ

$$y_i^0 = \begin{cases} \dfrac{1}{k(G)} & ,1 \le i \le k(G) \\ 0 & ,i > k(G) \end{cases}$$

Ակնհայտ է, որ $(y_1^0, y_2^0, \ldots, y_p^0) \in H_p$, և դժվար չէ նկատել, որ

$$\Phi_n(G) \ge F_{G,n}(y_1^0, y_2^0, \ldots, y_p^0) = \binom{k(G)}{n}\frac{1}{k(G)^n}:$$

$\Phi_n(G) \le \binom{k(G)}{n}\frac{1}{k(G)^n}$ անհավասարությունը ապացուցենք մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով: p-ի փոքր արժեքների դեպքում այն ակնհայտ է: Ընդունենք, որ անհավասարությունը ճիշտ է բոլոր այն գրաֆների համար, որոնց գագաթների թիվը փոքր է p -ից, և ապացուցենք , որ այն ճիշտ է p գագաթ պարունակող գրաֆների համար:

ա/ Դիցուք $G = K_p$:

Ապացուցենք, որ հավաքածուն , որի վրա $F_{G,n}(y_1,\ldots,y_p)$ ֆունկցիան ընդունում է մաքսիմում արժեք, հավաքծուի կոորդիանտներն իրար հավասար են : Իսկապես, դիցուք $(y_1^0, y_2^0, \ldots, y_p^0) \in H_p$ հավաքածուն ֆունկցիայի մաքսիմում կետ է, և $y_1^0 = \max\limits_{1\le i\le p} y_i^0 > \min\limits_{1\le i\le p} y_i^0 = y_2^0$: Այդ դեպքում դժվար չէ ապացուցել, որ

$$\left(\frac{y_1^0+y_2^0}{2}, \frac{y_1^0+y_2^0}{2}, y_3^0, \ldots, y_p^0\right) \in H_p$$

և

$$F_{G,n}\left(\frac{y_1^0+y_2^0}{2}, \frac{y_1^0+y_2^0}{2}, y_3^0, \ldots, y_p^0\right) - F_{G,n}(y_1^0, y_2^0, y_3^0, \ldots, y_p^0) = \left(\frac{y_1^0-y_2^0}{2}\right)^2 A$$

որտեղ $A > 0$:

Այսպիսով

$$\Phi_n(K_p) = F_{K_p,n}\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{p}, \ldots, \frac{1}{p}\right) = \binom{p}{n}\frac{1}{p^n}:$$

բ/ Դիցուք $G \ne K_p$:

Ցույց տանք, որ $\exists F_{G,n}(y_1,...,y_p)$ ֆունկցիայի մաքսիմումի կետ, որի համար գոնե մեկ կոորդինատը հավասար է զրոյի:

Իսկապես, եթե $(y_1^0, y_2^0,...,y_p^0) \in H_p$ հանդիսանում է մաքսիմումի կետ, որի բոլոր կոորդինատները մեծ են զրոյից, ապա

$F_{G,n}(y_1,...,y_p) - \lambda(y_1 + y_2 + ... + y_p - 1)$ ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալները այդ կետում պետք է դառնան զրո:

Հետևաբար այդ կետում պետք է բավարարվի հետևյալ հավասարությունը`

$$\frac{\partial F_{G,n}}{\partial y_i} = \frac{\partial F_{G,n}}{\partial y_j}, \qquad \text{որտեղ } 1 \le i \le j \le p:$$

Ենթադրենք $(1,2) \notin X$: Դժվար չէ նկատել, որ այս դեպքում $F_{G,n}(y_1,...,y_p)$ ֆունկցիան կընդունի հետևյալ տեսքը`

$$y_1 \frac{\partial F_{G,n}}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial F_{G,n}}{\partial y_2} + \psi$$

որտեղ ψ–ն կախված չի y_1 և y_2 փոփոխականներից, հետևաբար ստույգ է հետևյալ հավասարությունը

$$F_{G,n}(y_1^0, y_2^0, y_3^0,....,y_p^0) = F_{G,n}(0, y_1^0 + y_2^0, y_3^0,....,y_p^0):$$

Այսպիսով մաքսիմումի կետերի մեջ կա այնպիսին, որի մեկ կոորդինատը հավասար է զրոյի: Ընդհանրությունը չխախտելով կարելի է ենթադրել, որ այդ կետի կոորդինատներն են ` $(0, z_2^0, z_3^0,...,z_p^0)$:

Դիտարկենք $H=(V_1,X_1)$ գրաֆը, որտեղ $V_1 = V\backslash\{1\}$ և $X_1 = X \backslash \bigcup_{j=2}^{p} \{(1,j)\}$:

$F_{G,n}(y_1,...,y_p)$-ի սահմանումից ունենք, որ

$$\Phi_n(G) = F_{G,n}(0, z_2^0, z_3^0,...,z_p^0) = F_{H,n}(z_2^0, z_3^0,...,z_p^0)$$

Քանի որ H գրաֆը ունի $(p-1)$ գագաթ, ապա ինդուկցիայի ենթադրության համաձայն տեղի ունի`

$$F_{H,n}(z_2^0, z_3^0,...,z_p^0) \le \binom{k(H)}{n} \frac{1}{k(H)^n}:$$

Դժվար չէ նկատել, որ $k(H) \le k(G)$, և քանի որ $\binom{k(G)}{n} \frac{1}{k(G)^n}$ մոնոտոն աճող է, ապա տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը` $\Phi_n(G) \le \binom{k(G)}{n} \frac{1}{k(G)^n}$:

Թեորեմն ապացուցվեց:

<u>Թեորեմ2</u>: Ցանկացած p, h և s բնական թվերի համար տեղի ունի՝

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(p,h,s)t^n = (1+(1+m)t)^r (1+mt)^{h(s-1)-r}$$

որտեղ $p=mh(s-1)+r$ և $0 \le r < h(s-1)$:

<u>Ապացույց</u>: Նախ մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով ապացուցենք, որ եթե $p=m(s-1)+r$ և $0 \le r < (s-1)$, ապա բոլոր r-երի համար տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը՝

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(p,1,s)t^n \le (1+(1+m)t)^r (1+mt)^{s-1-r} \qquad (1)$$

Դիցուք $r=0$, $p=m(s-1)$ և G գրաֆը չի պարունակում s գագաթ պարունակող լրիվ ենթագրաֆ և պարունակում է մաքսիմալ թվով n գագաթ պարունակող լրիվ ենթագրաֆներ:

Թեորեմ1-ի պնդմամբ և $k(G)=s-1$ -ի համաձայն ունենք

$$F_{G,n}\left(\frac{1}{p},\frac{1}{p},\ldots,\frac{1}{p}\right) = f_n(p,1,s)\frac{1}{p^n}$$

Իսկ մյուս կողմից ակնհայտ է, որ

$$F_{G,n}\left(\frac{1}{p},\frac{1}{p},\ldots,\frac{1}{p}\right) \le \Phi_n(G) = \binom{s-1}{n}\frac{1}{(s-1)^n}$$

Այսպիսով

$$f_n(p,1,s) \le \binom{s-1}{n}\frac{1}{(s-1)^n};$$

Հեշտ է նկատել, որ անհավասարության աջ մասը հանդիսանում է $(1+mt)^{s-1}$ բազմանդամը արտադրիչների վերլուծելիս t^n–ի գործակիցը:

Ենթադրենք, որ $r>1$ դեպքում (1)-ը տեղի ունի $(p-1)$–ի համար, ցույց տանք,որ այն տեղի ունի p-ի համար:

Դիտարկենք (1,s)–ներելի p գագաթ պարունակող G գրաֆը, որը պարունակում է մաքսիմալ թվով n գագաթ պարունակող լրիվ ենթագրաֆներ, (1,s)-ներկվող p գագաթ պաունակող գրաֆների մեջ: Այդ գրաֆի մեջ անջատենք "i գագաթ: Դժվար չի համոզվել,որ այն n գագաթ պարունակող լրիվ ենթագրաֆների թիվը, որոնք չեն պարունակում i–րդ գագաթը, չի կարող գերազանցել $f_n(p-1,1,s)$, իսկ այն n գագաթ պարունակող լրիվ ենթագրաֆների քանակը, որոնք պարունակում են այդ i-րդ գագաթը հավասար է (n-1) գագաթ պարունակող լրիվ ենթագրաֆների քանակին, որոնց գագաթները կից են i–րդին:

Վերջին մեծությունը չի կարող գերազանցել ` $f_{n-1}(d(i),1,s-1)$, որտեղ $d(i)$–ն i–րդ գագաթի աստիճանն է:Այսպիսով`

$$f_n(p,1,s) \le f_n(p-1,1,s) + f_{n-1}(d(i),1,s-1)$$

Ցույց տանք, որ G գրաֆում կա գագաթ,որի աստիճանը չի կարող գերազանցել $m(s-2)+r-1$ թիվը: Իսկապես, հակառակ դեպքում գրաֆը կպարունակի վատագույն դեպքում կող ` $\frac{1}{2}(m(s-2)+r-1)(m(s-1)+r) > m^2\binom{s-1}{2} + mr(s-2) + \binom{r}{2}$ և համաձայն Տուրանի թեորեմի G գրաֆը կպարունակի s գագաթ պարունակող լրիվ ենթագրաֆ:

Եվ որպես i–րդ գագաթ ֆիքսենք այն գագաթը,որի աստիճանը չի գերազանցում $m(s-2)+r-1$ թիվը, ապա տեղի կունենա`

$$f_n(p,1,s) \le f_n(p-1,1,s) + f_{n-1}(m(s-2)+r-1,1,s-1):$$

Ըստ ինդուկցիոն ենթադրության տեղի կունենան

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(p-1,1,s)t^n \le (1+(1+m)t)^{r-1}(1+mt)^{s-r}$$

և

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_{n-1}(m(s-2)+r-1,1,s-1)t^n \le (1+(1+m)t)^{r-1}(1+mt)^{s-r-1}$$

Իսկ սա նշանակում է, որ

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(p,1,s)t^n \le (1+(1+m)t)^{r}(1+mt)^{s-1-r}$$

Այսպիսով ապացուցվեց (1) անհավասարությունը:

Հիմա ենթադրենք, որ G-ն հանդիսանում է p գագաթ պարունակող (h,s)–ներկելի գրաֆներից առավելագույն n գագաթ պարունակող լրիվ ենթագրաֆներ պարունակող:

Դժվար չէ ցույց տալ, որ G–ն չի կարող պարունակել $h(s-1)+1$ գագաթ պարունակող լրիվ ենթագրաֆ, հետևաբար`

$$f_n(p,h,s) \le f_n(p,1,h(s-1)+1)$$

Այստեղից հետևում է, որ տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը`

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(p,h,s)t^n \le (1+(1+m)t)^{r}(1+mt)^{h(s-1)-r}:$$

Դիտարկենք $G_{p,h}(V,X)$ գրաֆը, որտեղ $V=\{1,2,...,p\}$ և $(i,j)\in X$ այն և միայն այն դեպքում , երբ $(j-i)$-ն չի բաժանվում $h(s-1)$–ի վրա, եթե $1\leq i < j \leq p$:

$G_{p,h}(V,X)$ գրաֆը (h,s)-ներկելի է: Իսկապես,եթե $\varphi:V\rightarrow\{1,2,...,h\}$ արտապատկերումը որոշվի $\varphi(i)=a+1$ պայմանով այն և միայն այն դեպքում, երբ $a(s-1) \leq i < (a+1)(s-1)$, $1 \leq i \leq p$ ապա φ-ն կհանդիսանա $G_{p,h}(V,X)$ գրաֆի h-ներկելիությունը, որը տվյալ ներկման դեպքում չի պարունակում ոչ մի s գագաթ պարունակող լրիվ ենթագրաֆ, որի բոլոր գագաթները ներկված լինեն նույն գույնով:

$G_{p,h}(V,X)$ գրաֆի n գագաթ պարունակով լրիվ ենթագրաֆների քանակը կլինի`

$$\mu_n(G_{p,h}) = \sum_{i=0}^{n}\binom{r}{i}(m+1)^i\binom{h(s-1)-r}{n-i}m^{n-i}:$$

Հեշտ է նկատել, որ գրած արտահայտությունը հանդիսանում է $(1+(1+m)t)^r(1+mt)^{h(s-1)-r}$ բազմանդամը արտադրիչների վերլուծելիս t^n–ի գործակիցը: Թեորեմն ապացուցվեց:

Այսպիսով ցույց տվեցինք, որ $(1+(1+m)t)^r(1+mt)^{h(s-1)-r}$ բազմանդամը, որտեղ $p=mh(s-1)+r$ և $0 \leq r < h(s-1)$, հանդիսանում է $f_0(p,h,s)$, $f_1(p,h,s)$, $f_2(p,h,s)$,… հաջորդականության ծնող ֆունկցիան:

Գրականություն

1. Харари”Ф.”□Теория”графов□.”□Мир□,”М.,”1973
2. Garey,”M.”R.,”D.”S.”Johnson”[1976],”□Some”simplified”NP-complete”graph”problems,□” *Theor.”Comput*”
3. Berge”C.”□Graphs”and”and”Hypergraphs□,”New”York,”1976
4. Тоноян”Р.”□Юбилейный””сбовник””ЕГУ□,”Ереван,”1981