Рассмотрим следующую функцию

$$f(n) = 3n + 1, \quad \text{если} \quad n \equiv 1 (mod 2)$$

и

$$f(n) = 2l + 1, \quad \text{если} \quad n = 2^m(2l+1);\ m \geq 1.$$

Задача. Для любого n существует такое s, что $f^{(s)}(n) = 1$.

Возьмём любое число n, такое что $n \equiv 1(mod 2)$,
Рассмотрим итерации функции $f(n)$

$$f(n) = 3n + 1$$

$$f^{(2)}(n) = \frac{1}{2^{n_2}} f(n)$$

$$f^{(3)}(n) = 3f^{(2)}(n) + 1$$

$$\dots$$

$$f^{(2i)}(n) = \frac{1}{2^{n_{2i}}} f^{(2i-1)}(n)$$

$$f^{(2i+1)}(n) = 3f^{(2i)}(n) + 1$$

$$\dots$$

Теорема 1. Если для любого i имеет место $f^{(2i+1)}(n) \equiv 0(mod 4)$, где $2i+1$ является числом итераций, то существует s, такое что $f^{(s)}(n) = 1$.

Доказательство. Для доказательства теоремы нам достаточно доказать, что для любого i имеет место $f^{(2i+2)}(n) < f^{(2i)}(n)$.

Возьмём произвольное число i и рассмотрим

$$f^{(2i+1)}(n) = 3f^{(2i)}(n) + 1$$

$$f^{(2i+2)}(n) = \frac{1}{2^{q_i}} f^{(2i+1)}(n) = \frac{1}{2^{q_i}}(3f^{(2i)}(n) + 1), \quad \text{где} \quad q_i \geq 2.$$

$$f^{(2i)}(n) - f^{(2i+2)}(n) = f^{(2i)}(n) - \frac{3}{2^{q_i}} f^{(2i)}(n) - \frac{1}{2^{q_i}} = f^{(2i)}(n)\left(1 - \frac{3}{2^{q_i}}\right) - \frac{1}{2^{q_i}}.$$

Очевидно, что

$$f^{(2i)}(n)\left(1 - \frac{3}{2^{q_i}}\right) - \frac{1}{2^{q_i}} > 0, \quad \text{когда} \quad q_i \geq 2.$$

Из чисел, удовлетворяющих теореме, являются числа 5, 13, 17, $\cdots$.

Числа вида $n = 4k + 1$, где $k-$числа, удовлетворяющие теореме 1, $f^{(s)}(k) = 1$ и $k \equiv 1(mod 2)$ также удовлетворяют теореме. 53, 69, 277, 1109, $\cdots$ являются такими.

Теорема 2. Если для любого числа i имеет место $f^{(2i+1)}(n) \equiv 0(mod 4)$, где $2i + 1$ является числом итераций, то не существует такого числа s, что $f^{(s)}(n) = 1$.

Доказательство. Для доказательства теоремы нам достаточно доказать, что для любого числа i имеет место $f^{(2i+2)}(n) > f^{(2i)}(n)$.

Возьмём любое число i и рассмотрим

$$f^{(2i+1)}(n) = 3f^{(2i)}(n) + 1$$

$$f^{(2i+2)}(n) = \frac{1}{2}f^{(2i+1)}(n) = \frac{3}{2}f^{(2i)}(n) + \frac{1}{2}$$

$$f^{(2i+2)}(n) - f^{(2i)}(n) = \frac{3}{2}f^{(2i)}(n) + \frac{1}{2} - f^{(2i)}(n) = \frac{1}{2}(f^{(2i)}(n) + 1) > 0.$$

Покажем, что не существует такого конечного числа , которое удовлетворяло бы Теореме 2.

Возьмём любое число n и покажем, что если оно удовлетворяет Теореме 2, то оно бесконечно.

$$f(n) = 3n + 1 = 4k + 2$$

$$f^{(2)}(n) = 2k + 1$$

$$f^{(3)}(n) = 6k + 4$$

$$f^{(4)}(n) = 3k + 2 = \frac{3k + 3 - 2^0}{2^0}$$

$$f^{(5)}(n) = \frac{3^2k + 3^2 - 3 \cdot 2^0}{2^0} + 1 = \frac{3^2k + 3^2 - 2 \cdot 2^0}{2^0}$$

$$f^{(6)}(n) = \frac{3^2k + 3^2 - 2}{2}$$

$$f^{(7)}(n) = \frac{3^3k + 3^3 - 2 \cdot 3}{2} + 1 = \frac{3^3k + 3^3 - 2(3 - 1)}{2} = \frac{3^3k + 3^3 - 2^2}{2}$$

$$f^{(8)}(n) = \frac{3^3k + 3^3 - 2^2}{2^2}$$

$$f^{(9)}(n) = \frac{3^4k + 3^4 - 2^3}{2^2}$$

$$f^{(10)}(n) = \frac{3^4k + 3^4 - 2^3}{2^3}$$

$$\dots$$
$$f^{(2i+2)} = \frac{3^i k + 3^i - 2^{i-1}}{2^{i-1}}$$
$$\dots$$

Отсюда следует, что для того, чтобы $f^{(2i+2)}(n)$ было целым числом, необходимо и достаточно, чтобы k имело следующий вид $k = C \cdot 2^{i-1+C_1} - 1$, где числа C и C_1 какие-то числа. А это означает, что k зависит от числа итераций, которое бесконечно, следовательно k бесконечно. Отсюда следует, что n бесконечно.